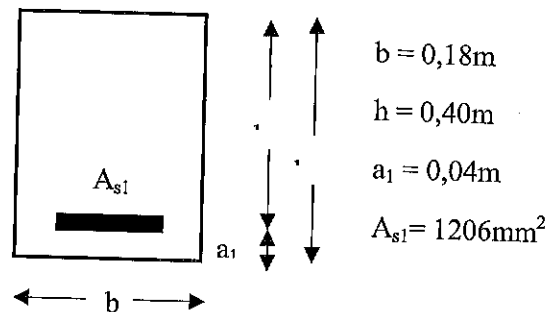
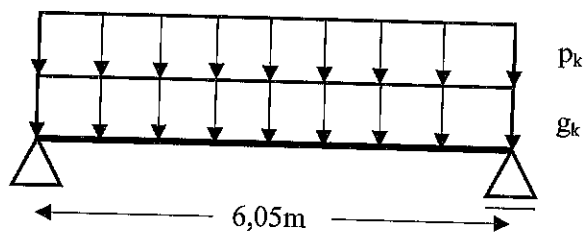


## Projekt 5

Imię i nazwisko....., grupa.....

Dla podanych założeń wyznaczyć następujące miary niezawodności belki zginanej:

- odstęp bezpieczeństwa i globalny współczynnik bezpieczeństwa
- wskaźnik niezawodności Cornela
- wskaźnik niezawodności Hasofer–Linda



Dane:

$$p_k = 8,26 \text{ kN/m}; v_p = 0,3$$

$$g_k = 7,101 \text{ kN/m}; v_g = 0,05$$

$$\text{Beton: C20/25} \rightarrow f_{ck} = 20 \text{ MPa}$$

$$v_c = 0,17$$

$$\text{Stal:} \rightarrow f_{yk} = 500 \text{ MPa}$$

$$v_y = 0,05$$

Losowe zmienne stanu:

- obciążenia (charakterystyczne, obliczeniowe, średnie):

$$p_k = 8,26 \text{ kN/m}; p_d = \gamma_F \cdot p_k = 1,50 \cdot 8,26 \text{ kN/m} = 12,39 \text{ kN/m}$$

$$p_m = p_k / (1 + 1,645 v_p) = 8,26 / (1 + 1,645 \cdot 0,30) = 5,53 \text{ kN/m}$$

$$\sigma_p = p_m \cdot v_p = 5,53 \cdot 0,30 = 1,66 \text{ kN/m}$$

$$g_k = 7,101 \text{ kN/m}; g_d = \gamma_F \cdot g_k = 1,35 \cdot 7,101 \text{ kN/m} = 9,59 \text{ kN/m}$$

$$g_m = g_k / (1 + 1,645 v_g) = 7,101 / (1 + 1,645 \cdot 0,05) = 6,56 \text{ kN/m}$$

$$\sigma_g = g_m \cdot v_g = 6,56 \cdot 0,05 = 0,33 \text{ kN/m}$$

- właściwości materiałów (charakterystyczne, obliczeniowe, średnie):

beton C20/25:

$$f_{ck} = 20 \text{ MPa}; \gamma_c = 1,4; f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c = 20/1,4 = 14,28 \text{ MPa}$$

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 = 20 + 8 = 28 \text{ MPa};$$

Fragment tabeli 3.1 PN-EN 1992-1-1 – właściwości betonu

Klasy wytrzymałości betonu															Zależności analityczne/Wyjaśnienie
$f_{ck}$ (MPa)	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	
$f_{ck,cube}$ (MPa)	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	
$f_{cm}$ (MPa)	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	$f_{cm} = f_{ck} + 8$ ( $f_{ck}$ w MPa)

$$\sigma_c = f_{cm} \cdot v_c = 28 \cdot 0,17 = 4,76 \text{ MPa}$$

Stal zbrojeniowa:

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa}; f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s = 500/1,15 = 434,78 \text{ MPa}$$

$$f_{ym} = f_{yk}/(1 - 1,645 v_y) = 500/(1 - 1,645 \cdot 0,05) = 544,81 \text{ MPa} \text{ (zał. D PN-EN 1990)}$$

$$\sigma_y = f_{ym} \cdot v_y = 544,81 \cdot 0,05 = 27,24 \text{ MPa}$$

## Rozwiązanie:

### a) odstęp bezpieczeństwa i globalny współczynnik bezpieczeństwa

Nośność płyty obliczona metodą uproszczoną – miarą bezpieczeństwa w metodach poziomu 1 może być odstęp bezpieczeństwa:

$$\Delta = R_d - E_d \geq 0$$

Belkę uważa się za niezawodną, jeżeli obliczeniowa nośność miarodajnego przekroju  $R_d$  jest nie mniejsza niż obliczeniowa wartość efektu oddziaływań  $R_d \geq E_d$ .

Nośność płyty  $R_d$ :

$$R_d = M_{Rd} = A_{s1} \cdot f_{yd} \cdot d - 0,5 \cdot \frac{A_{s1}^2 \cdot f_{yd}^2}{b \cdot f_{cd}} = 0,001206 \text{ m}^2 \cdot 434,78 \cdot 1000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,36 \text{ m} - 0,5 \cdot \frac{(0,001206 \text{ m})^2 \cdot (434,78 \cdot 1000 \text{ kN/m}^2)^2}{0,18 \text{ m} \cdot 14,28 \cdot 1000 \text{ kN/m}^2} = 135,28 \text{ kNm}$$

Obliczeniowa wartość efektu oddziaływań:

$$E_d = M_{Ed} = 0,125 l_{eff}^2 (g_d + p_d) = 0,125 \cdot (6,05m)^2 (9,59kN/m + 12,39kN/m) = 100,56kNm$$

Z uwagi na to, że  $R_d = 135,28kNm > E_d = 100,56kNm$  belkę można uznać za niezawodną, ale nie można ilościowo ocenić miary niezawodności.

Przydatną w praktyce, ilościową miarą niezawodności elementów żelbetowych jest globalny współczynnik bezpieczeństwa, który ma jednak czysto empiryczny charakter:

$$\gamma = \frac{R_k}{E_k}$$

$$R_k = A_{s1} \cdot f_{yk} \cdot d - 0,5 \cdot \frac{A_{s1}^2 \cdot f_{yk}^2}{b \cdot f_{ck}} = 0,001206m^2 \cdot 500 \cdot 1000kN/m^2 \cdot 0,36m - 0,5 \cdot \frac{(0,001206m)^2 \cdot 500 \cdot 1000kN/m^2}{0,18m \cdot 20 \cdot 1000kN/m^2} = 166578750Nmm = 166,58kNm$$

$$E_k = 0,125 l_{eff}^2 (g_k + p_k) = 0,125 \cdot (6,05m)^2 (8,26kN/m + 7,101kN/m) = 70,28kNm$$

$$\gamma = \frac{R_k}{E_k} = \frac{166,58kNm}{70,28kNm} = 2,4 > 1,6$$

Według historycznej normy PN-56/B-03260 oznacza, że belka jest bezpieczna.

#### b) wskaźnik niezawodności Cornela

Warunek stanu granicznego ma postać nieliniową.

$$\Delta = R - E$$

$$R = A_{s1} \cdot f_y \cdot d - 0,5 \cdot \frac{A_{s1}^2 \cdot f_y^2}{b \cdot f_c}$$

$$E = 0,125 l_{eff}^2 (g + p)$$

$$\Delta = A_{s1} \cdot f_y \cdot d - 0,5 \cdot \frac{A_{s1}^2 \cdot f_y^2}{b \cdot f_c} - 0,125 l_{eff}^2 (g + p)$$

Wartość oczekiwaną  $\bar{\Delta}$  i odchylenie standardowe  $\sigma_{\Delta}$ , niezbędne do obliczenia wskaźnika niezawodności  $\beta$ , można aproksymować rozwijając  $\Delta$  w szereg Taylora i pozostawiając tylko człony liniowe rozwinięcia. Rozwinięcie funkcji  $\Delta$  w szereg Taylora w otoczeniu punktu centralnego.

Podstawiamy to funkcji stanu granicznego wartości średnie zmiennych losowych:

$$\bar{\Delta} = A_{s1} \cdot f_{ym} \cdot d - 0,5 \cdot \frac{A_{s1}^2 \cdot f_{ym}^2}{b \cdot f_{cm}} - 0,125 l_{eff}^2 (g_m + p_m)$$

$$\bar{\Delta} = 0,001206m^2 \cdot 544,81 \cdot 1000kN/m^2 \cdot 0,36m - 0,5 \cdot \frac{(0,001206m)^2 \cdot (544,81 \cdot 1000kN/m^2)^2}{0,18m \cdot 28 \cdot 1000kN/m^2} - 0,125 \cdot (6,05m)^2 \cdot (6,56 + 5,53)kN/m = 138,39 kNm$$

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\left(\sigma_y \frac{\partial \Delta}{\partial f_{y_{f_y=f_{ym}}}}\right)^2 + \left(\sigma_c \frac{\partial \Delta}{\partial f_{c_{f_c=f_{cm}}}}\right)^2 + \left(\sigma_g \frac{\partial \Delta}{\partial g_{g=g_m}}\right)^2 + \left(\sigma_p \frac{\partial \Delta}{\partial p_{p=p_m}}\right)^2}$$

Liczymy poszczególne pochodne. Pierwszy wzór to pochodna funkcji stanu granicznego po  $f_{ym}$ :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial f_{y_{f_y=f_{ym}}}} = A_{s1}d - \frac{2A_{s1}^2 f_{ym}}{2bf_{cm}} = 0,001206m^2 \cdot 0,36m - \frac{2(0,001206m)^2 \cdot 544,81 \cdot 1000kN/m^2}{2 \cdot 0,18 \cdot 28 \cdot 1000kN/m^2} = 0,000262544m^3$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial f_{c_{f_c=f_{cm}}}} = \frac{A_{s1}^2 f_{ym}^2}{2bf_{cm}^2} = \frac{(0,001206m)^2 \cdot (544,81 \cdot 1000kN/m^2)^2}{2 \cdot 0,18 \cdot (28 \cdot 1000kN/m^2)^2} = 0,0016696m^3$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial g_{g=g_m}} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{p=p_m}} = -0,125 l_{eff}^2 = -4,5753125m^2$$

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{(27,24 \cdot 1000kN/m^2 \cdot 0,000262544m^3)^2 + (4,76 \cdot 1000kN/m^2 \cdot 0,0016696m^3)^2 + \sqrt{+(0,33kN/m \cdot (-4,5753125m^2))^2 + (1,66kN/m \cdot (-4,5753125m^2))^2}} = 13,20 kNm$$

$$\beta = \frac{\bar{\Delta}}{\sigma_{\Delta}} = \frac{138,39 kNm}{13,20 kNm} = 10,48$$

### c) wskaźnik niezawodności Hasofera Linda

Sprawdzenie niezawodności belki żelbetowej uproszczoną metodą probabilistyczną. Warunek stanu granicznego ma postać:

$$\Delta = R - E = A_{s1} \cdot f_y \cdot d - 0,5 \cdot \frac{A_{s1}^2 \cdot f_y^2}{b \cdot f_c} - 0,125 l_{eff}^2 (g + p)$$

Rozwinięcie funkcji  $\Delta$  w szereg Taylora w otoczeniu punktu obliczeniowego dokonano wprowadzając zmienne standaryzowane  $\xi$  według zależności:

$$\xi_i = \frac{X_{id} - X_{im}}{\sigma_i} \rightarrow X_{id} = X_{im} + \xi_i \cdot \sigma_i$$

Założenie:

$$\sigma_1 = \sigma_y; \sigma_2 = \sigma_c; \sigma_3 = \sigma_g; \sigma_4 = \sigma_p$$

$$\xi_1 = \frac{f_{yd} - f_{ym}}{\sigma_y} \rightarrow f_{yd} = f_{ym} + \xi_1 \cdot \sigma_y$$

$$\xi_2 = \frac{f_{cd} - f_{cm}}{\sigma_c} \rightarrow f_{cd} = f_{cm} + \xi_2 \cdot \sigma_c$$

$$\xi_3 = \frac{g_d - g_m}{\sigma_g} \rightarrow g_d = g_m + \xi_3 \cdot \sigma_g$$

$$\xi_4 = \frac{p_d - p_m}{\sigma_p} \rightarrow p_d = p_m + \xi_4 \cdot \sigma_p$$

Warunek niezawodności we współrzędnych standaryzowanych ma postać:

$$\Delta = R - E = A_s \cdot f_y \cdot d - 0,5 \cdot \frac{A_s^2 \cdot f_y^2}{b \cdot f_c} - 0,125 l_{eff}^2 (g + p)$$

podstawiamy zmienne standaryzowane

$$\Delta = A_s (f_{ym} + \xi_1 \sigma_y) d - 0,5 \cdot \frac{A_s^2 (f_{ym} + \xi_1 \sigma_y)^2}{b (f_{cm} + \xi_2 \sigma_c)} - 0,125 l_{eff}^2 (g_m + \xi_3 \sigma_g + p_m + \xi_4 \sigma_p)$$

$$\Delta = A_s d f_{ym} + A_s \xi_1 \sigma_y d - \frac{A_s^2 f_{ym}^2 + 2 A_s^2 f_{ym} \xi_1 \sigma_y + A_s^2 \xi_1^2 \sigma_y^2}{2 b f_{cm} + 2 b \xi_2 \sigma_c} - 0,125 l_{eff}^2 g_m - 0,125 l_{eff}^2 \xi_3 \sigma_g - 0,125 l_{eff}^2 p_m - 0,125 l_{eff}^2 \xi_4 \sigma_p$$

Po rozwinięciu funkcji  $\Delta$  w szereg Taylora pozostawia się tylko człony liniowe.

$$\Delta(\xi_1^*; \xi_2^*; \xi_3^*; \xi_4^*) = \sum_{i=1}^4 (\xi_i - \xi_i^*) \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_i}_{\xi_i = \xi_i^*} = \sum_{i=1}^4 (\xi_i - \xi_i^*) a_i = 0$$

Liczymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_1}_{\xi_1 = \xi_1^*} = a_1 = A_s \sigma_y d - \frac{2 A_s^2 f_{ym} \sigma_y + A_s^2 \sigma_y^2 2 \xi_1}{2 b f_{cm} + 2 b \xi_2 \sigma_c}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_2}_{\xi_2 = \xi_2^*} = a_2 = 2 b \sigma_c \frac{A_s^2 f_{ym}^2 + 2 A_s^2 f_{ym} \xi_1 \sigma_y + A_s^2 \xi_1^2 \sigma_y^2}{(2 b f_{cm} + 2 b \xi_2 \sigma_c)^2}$$

$$a_3 = -0,125 l_{eff}^2 \sigma_g = -0,125 \cdot (6,05m)^2 \cdot 0,33kN/m = -1,6kNm$$

$$a_4 = -0,125 l_{eff}^2 \sigma_p = -0,125 \cdot (6,05m)^2 \cdot 1,66kN/m = -7,6kNm$$



Rozwiązania zadania poszukuje się metodą kolejnych przybliżeń w następujący sposób:

a) pierwszy krok iteracji

Wybór początkowych wartości współrzędnych standaryzowanych  $\xi_1^0; \xi_2^0; \xi_3^0; \xi_4^0$  i obliczenie początkowej wartości wskaźnika niezawodności z zależności:

$$\beta^0 = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\xi_i^0)^2}$$

a) drugi krok iteracji

Obliczyć wartości  $a_i$ , gdy  $i = 1, 2, 3, 4$  dla przyjętych wartości  $\xi_i^0$ , wyznaczyć nowe współrzędne standaryzowane z zależności:

$$\xi_i^1 = a_i \frac{\sum_{k=1}^4 a_k^0 \xi_k^0 - \Delta(\xi_i^0)}{\sum_{k=1}^4 (a_k^0)^2}$$

oraz wskaźnik niezawodności:

$$\beta^1 = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\xi_i^1)^2}$$

a) kolejne kroki iteracji polegają na powtórzeniu drugiego kroku, aż do osiągnięcia ustabilizowanej wartości

$$\beta = \min \sqrt{\sum_{i=1}^4 \xi_i^2}$$

Do wyznaczenia wartości  $\beta_{min}$  można skorzystać z Solvera (funkcja EXCEL).

a) pierwszy krok iteracji

Wartości  $\xi_i^0$  przyjęto jak w metodzie półprobabilistycznej:

$$\xi_1^0 = \frac{f_{yd} - f_{ym}}{\sigma_y} = \frac{434,78 - 544,81}{27,24} = -4,04$$

$$\xi_2^0 = \frac{f_{cd} - f_{cm}}{\sigma_c} = \frac{14,28 - 28}{4,76} = -2,88$$

$$\xi_3^0 = \frac{g_d - g_m}{\sigma_g} = \frac{9,59 - 6,56}{0,33} = 9,18$$

$$\xi_4^0 = \frac{p_d - p_m}{\sigma_p} = \frac{12,39 - 5,35}{1,66} = 4,24$$

$$\beta^0 = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\xi_i^0)^2} = \sqrt{(-4,04)^2 + (-2,88)^2 + (9,18)^2 + (4,24)^2} = 11,26$$

a) drugi krok iteracji

$$a_1 = A_s \sigma_y d - \frac{2A_s^2 f_{ym} \sigma_y + A_s^2 \sigma_y^2 2\xi_1}{2bf_{cm} + 2b\xi_2 \sigma_c} = 5,12 kNm$$

$$a_2 = 2b\sigma_c \frac{A_s^2 f_{ym}^2 + 2A_s^2 f_{ym} \xi_1 \sigma_y + A_s^2 \xi_1^2 \sigma_y^2}{(2bf_{cm} + 2b\xi_2 \sigma_c)^2} = 17,83 kNm$$

$$a_3 = -1,6 kNm$$

$$a_4 = -7,6 kNm$$

$$\Delta = A_s d f_{ym} + A_s \xi_1 \sigma_y d - \frac{A_s^2 f_{ym}^2 + 2A_s^2 f_{ym} \xi_1 \sigma_y + A_s^2 \xi_1^2 \sigma_y^2}{2bf_{cm} + 2b\xi_2 \sigma_c} - 0,125 l_{eff}^2 g_m$$

$$-0,125 l_{eff}^2 \xi_3 \sigma_g - 0,125 l_{eff}^2 p_m - 0,125 l_{eff}^2 \xi_4 \sigma_p = 34,72 kNm$$

$$\xi_1^1 = a_1 \frac{\sum_{i=1}^4 a_k^0 \xi_k^0 - \Delta(\xi_i^0)}{\sum_{i=1}^4 (a_k^0)^2} = -1,93$$

$$\xi_2^1 = a_2 \frac{\sum_{i=1}^4 a_k^0 \xi_k^0 - \Delta(\xi_i^0)}{\sum_{i=1}^4 (a_k^0)^2} = -6,71$$

$$\xi_3^1 = a_3 \frac{\sum_{i=1}^4 a_k^0 \xi_k^0 - \Delta(\xi_i^0)}{\sum_{i=1}^4 (a_k^0)^2} = 0,56$$

$$\xi_4^1 = a_4 \frac{\sum_{i=1}^4 a_k^0 \xi_k^0 - \Delta(\xi_i^0)}{\sum_{i=1}^4 (a_k^0)^2} = 2,85$$

$$\beta^1 = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\xi_i^1)^2} = \sqrt{(-1,93)^2 + (-6,71)^2 + (0,56)^2 + (2,85)^2} = 7,56$$

a) trzeci krok iteracji

$$a_1 = A_s \sigma_y d - \frac{2A_s^2 f_{ym} \sigma_y + A_s^2 \sigma_y^2 2\xi_1}{2bf_{cm} + 2b\xi_2 \sigma_c} = 39,31 kNm$$

$$a_2 = 2b\sigma_c \frac{A_s^2 f_{ym}^2 + 2A_s^2 f_{ym} \xi_1 \sigma_y + A_s^2 \xi_1^2 \sigma_y^2}{(2bf_{cm} + 2b\xi_2 \sigma_c)^2} = 299,85 kNm$$

$$a_3 = -1,6kNm$$

$$a_4 = -7,6kNm$$

$$\Delta = A_s d f_{ym} + A_s \xi_1 \sigma_y d - \frac{A_s^2 f_{ym}^2 + 2 A_s^2 f_{ym} \xi_1 \sigma_y + A_s^2 \xi_1^2 \sigma_y^2}{2 b f_{cm} + 2 b \xi_2 \sigma_c} - 0,125 l_{eff}^2 g_m$$

$$-0,125 l_{eff}^2 \xi_3 \sigma_g - 0,125 l_{eff}^2 p_m - 0,125 l_{eff}^2 \xi_4 \sigma_p = 384,20kNm$$

$$\xi_1^1 = a_1 \frac{\sum_{i=1}^4 a_k^0 \xi_k^0 - \Delta(\xi_i^0)}{\sum_{i=1}^4 (a_k^0)^2} = -1,07$$

$$\xi_2^1 = a_2 \frac{\sum_{i=1}^4 a_k^0 \xi_k^0 - \Delta(\xi_i^0)}{\sum_{i=1}^4 (a_k^0)^2} = -8,17$$

$$\xi_3^1 = a_3 \frac{\sum_{i=1}^4 a_k^0 \xi_k^0 - \Delta(\xi_i^0)}{\sum_{i=1}^4 (a_k^0)^2} = 0,04$$

$$\xi_4^1 = a_4 \frac{\sum_{i=1}^4 a_k^0 \xi_k^0 - \Delta(\xi_i^0)}{\sum_{i=1}^4 (a_k^0)^2} = 0,21$$

$$\beta^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\xi_i^1)^2} = \sqrt{(-1,93)^2 + (-6,71)^2 + (0,56)^2 + (2,85)^2} = 8,25$$