TWIERDZENIE BAYESA

Przykład zastosowania tw. Bayesa:

- Na podstawie badań próbek betonu w czasie budowy, jego wytrzymałość sklasyfikowano jako:

Zdarzenie	Stan f_{cm} [MPa]	Prawd. „a priori" (wstępne)
A_1	$10 \div 20$	$P(A_1) = 0{,}30$
A_2	$21 \div 25$	$P(A_2) = 0{,}25$
A_3	$26 \div 30$	$P(A_3) = 0{,}40$
A_4	$31 \div 40$	$P(A_4) = 0{,}05$
		$\Sigma = 1{,}00$

A_i (A_1, A_2, A_3, A_4), n = 4
$P(A_i)$ – prawd. wystąpienia wytrzymałości f_{cm} w odpowiednim przedziale (na podstawie badań próbek z okresu budowy)

- W celu ustalenia faktycznej wytrzymałości średniej pobrano (kolejno) próbki z konstrukcji i określono wytrzymałości – zdarzenie B
Wyniki badań są obarczone błędami (pobór próbki, przygotowanie, badanie, itp.) i należy określić zaufanie do nich, czyli prawdopodobieństwo, że wytrzymałość betonu odpowiada wynikowi próby, że jest ona większa lub mniejsza od rzeczywistej, tzn. $P(B/A_i)$

Wytrz. pobranej próbki (B/A_i)	$P(B/A_i)$				
	A_1	A_2	A_3	A_4	
$(10 \div 20)A_1$	0,85	0,10	0,05	0,00	$\Sigma = 1{,}00$
$(21 \div 25)A_2$	0,10	0,80	0,10	0,00	$\Sigma = 1{,}00$
$(26 \div 30)A_3$	0,05	0,10	0,80	0,05	$\Sigma = 1{,}00$
$(31 \div 40)A_4$	0,00	0,05	0,10	0,85	$\Sigma = 1{,}00$

Rozwiązanie:

- Badanie pierwsze: $f_{cm} = 23\ MPa \in (21 \div 25\ MPa)$

$$P(A_1/23) = \frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}30\cdot 0{,}10}{0{,}10\cdot 0{,}30 + 0{,}80\cdot 0{,}25 + 0{,}1\cdot 0{,}40 + 0{,}00\cdot 0{,}05} = 0{,}111$$

$$P(A_2/23) = \frac{P(A_2)\cdot P(B/A_2)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}25\cdot 0{,}80}{0{,}10\cdot 0{,}30 + 0{,}80\cdot 0{,}25 + 0{,}1\cdot 0{,}40 + 0{,}00\cdot 0{,}05} = 0{,}741$$

$$P(A_3/23) = \frac{P(A_3)\cdot P(B/A_3)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}40\cdot 0{,}10}{0{,}10\cdot 0{,}30 + 0{,}80\cdot 0{,}25 + 0{,}1\cdot 0{,}40 + 0{,}00\cdot 0{,}05} = 0{,}148$$

$$P(A_4/23) = \frac{P(A_4)\cdot P(B/A_4)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}05\cdot 0{,}0}{0{,}10\cdot 0{,}30 + 0{,}80\cdot 0{,}25 + 0{,}1\cdot 0{,}40 + 0{,}00\cdot 0{,}05} = 0$$

Zestawienie prawd. „a priori" i „a posteriori" po uwzględnieniu kolejnych wyników badań:

Zdarzenie	Stan f_{cm} [MPa]	P (A_i) „a priori"	P (A_i) „a posteriori" po j-tej próbie		
			1	2	3
A_1	$10 \div 20$	$P(A_1) = 0{,}30$	0,111	…	…
A_2	$21 \div 25$	$P(A_2) = 0{,}25$	0,741	…	…
A_3	$26 \div 30$	$P(A_3) = 0{,}40$	0,148	…	…
A_4	$31 \div 40$	$P(A_4) = 0{,}05$	0,00	…	…
		$\Sigma = 1{,}00$	$\Sigma = 1{,}00$		

- Badanie drugie: $f_{cm} = 28\ MPa \in (26 \div 30\ MPa)$

$$P(A_1/28) = \frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}111\cdot 0{,}05}{0{,}111\cdot 0{,}05 + 0{,}741\cdot 0{,}10 + 0{,}148\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$$= 0{,}028$$

$$P(A_2/28) = \frac{P(A_2)\cdot P(B/A_2)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}741\cdot 0{,}10}{0{,}111\cdot 0{,}05 + 0{,}741\cdot 0{,}10 + 0{,}148\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$$= 0{,}374$$

$$P(A_3/28) = \frac{P(A_3)\cdot P(B/A_3)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}148\cdot 0{,}80}{0{,}111\cdot 0{,}05 + 0{,}741\cdot 0{,}10 + 0{,}148\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$$= 0{,}598$$

$$P(A_4/28) = \frac{P(A_4)\cdot P(B/A_4)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}00\cdot 0{,}05}{0{,}111\cdot 0{,}05 + 0{,}741\cdot 0{,}10 + 0{,}148\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$$= 0$$

Zestawienie prawd. „a priori" i „a posteriori" po uwzględnieniu kolejnych wyników badań:

Zdarzenie	Stan f_{cm} [MPa]	P (A_i) „a priori"	P (A_i) „a posteriori" po j-tej próbie		
			1	2	3
A_1	10 ÷ 20	$P(A_1) = 0{,}30$	0,111	0,028	...
A_2	21 ÷ 25	$P(A_2) = 0{,}25$	0,741	0,374	...
A_3	26 ÷ 30	$P(A_3) = 0{,}40$	0,148	0,598	...
A_4	31 ÷ 40	$P(A_4) = 0{,}05$	0,00	0,00	...
		$\Sigma = 1{,}00$	$\Sigma = 1{,}00$	$\Sigma = 1{,}00$	

Kolejno badanie trzecie,... , aż uzyskamy akceptowalną dokładność (zbieżność wyników).

- Badanie trzecie: $f_{cm} = 29\ MPa \in (26 \div 30\ MPa)$

$$P(A_1/29) = \frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}028\cdot 0{,}05}{0{,}028\cdot 0{,}05 + 0{,}374\cdot 0{,}10 + 0{,}598\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$$= 0{,}003$$

$$P(A_2/29) = \frac{P(A_2)\cdot P(B/A_2)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}374\cdot 0{,}10}{0{,}028\cdot 0{,}05 + 0{,}374\cdot 0{,}10 + 0{,}598\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$$= 0{,}072$$

$$P(A_3/29) = \frac{P(A_3)\cdot P(B/A_3)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}598\cdot 0{,}80}{0{,}028\cdot 0{,}05 + 0{,}374\cdot 0{,}10 + 0{,}598\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$$= 0{,}925$$

$$P(A_4/29) = \frac{P(A_4)\cdot P(B/A_4)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}00\cdot 0{,}05}{0{,}028\cdot 0{,}05 + 0{,}374\cdot 0{,}10 + 0{,}598\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$$= 0$$

Zestawienie prawd. „a priori" i „a posteriori" po uwzględnieniu kolejnych wyników badań:

Zdarzenie	Stan f_{cm} [MPa]	P (A_i) „a priori"	P (A_i) „a posteriori" po j-tej próbie		
			1	2	3
A_1	10 ÷ 20	$P(A_1) = 0{,}30$	0,111	0,028	0,003
A_2	21 ÷ 25	$P(A_2) = 0{,}25$	0,741	0,374	0,072
A_3	26 ÷ 30	$P(A_3) = 0{,}40$	0,148	0,598	0,925
A_4	31 ÷ 40	$P(A_4) = 0{,}05$	0,00	0,00	0
		$\Sigma = 1{,}00$	$\Sigma = 1{,}00$	$\Sigma = 1{,}00$	$\Sigma = 1{,}00$

W badaniu trzecim dla wyniku $f_{cm} = 29\ MPa$ uzyskano wartość prawdopodobieństwa „a posteriori" na poziomie 0,925 co jest wynikiem dającym dużą zbieżność wyników i może wskazywać na wystarczającą liczbę prób. Zatem należy wnioskować, że faktyczna wytrzymałość średnia znajduje się w przedziale 26 ÷ 30 MPa.