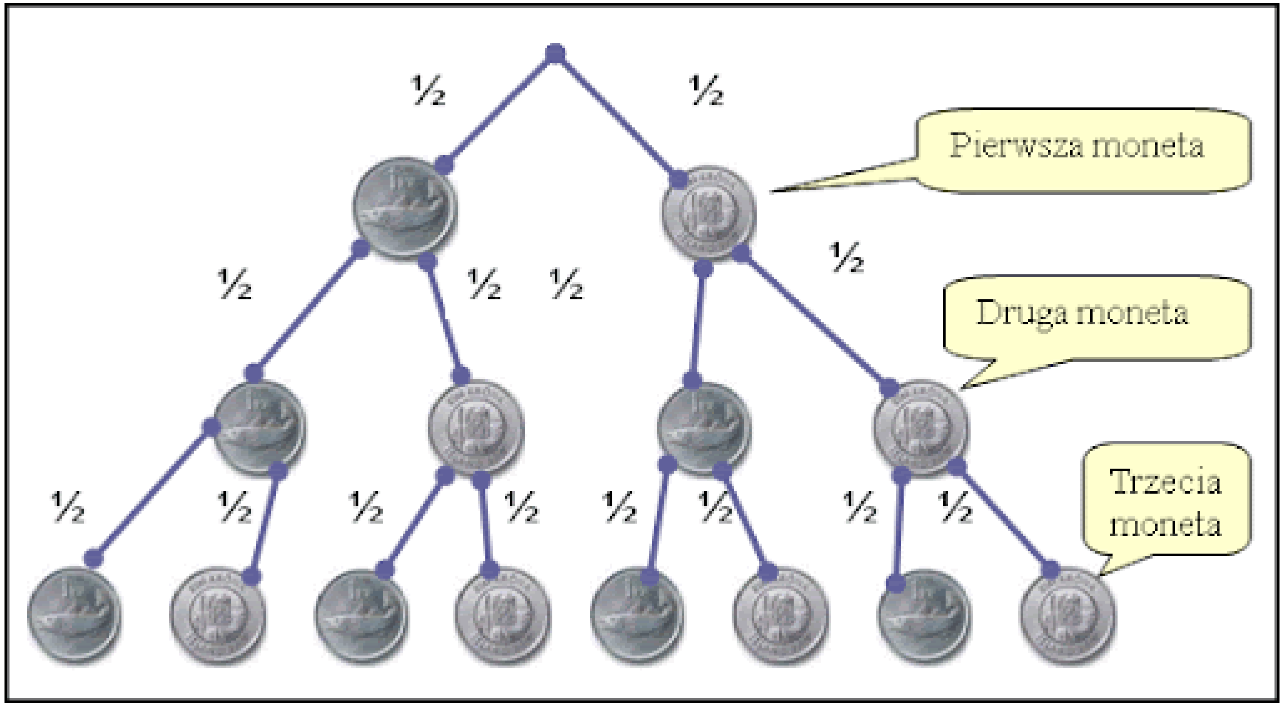
PODSTAWY PROJEKTOWANIA KONSTRUKCJI

ĆWICZENIA PROJEKTOWE

TWIERDZENIE BAYESA

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA



$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie:

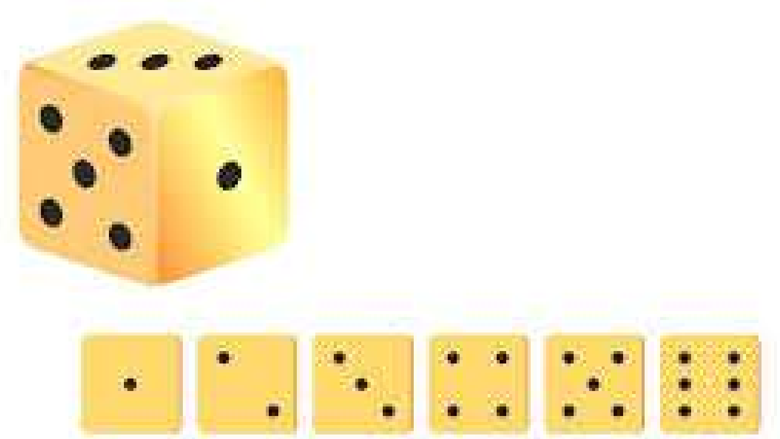
$|A|$ - to liczba zdarzeń sprzyjających (moc zbioru $|A|$)

$|\Omega|$ - to liczba wszystkich możliwych zdarzeń (moc zbioru $|\Omega|$)

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Doświadczenie losowe:

doświadczenie (eksperyment), którego wyniku z góry nie można określić, gdyż zależy on od przypadku (np. rzut monetą lub kostką, urodziny dziecka, czas oczekiwania na tramwaj, długość gwoździa 1 calowego)



Zdarzenie (zdarzenie losowe)

wynik doświadczenia losowego.

Zbiór możliwych wyników doświadczenia losowego (zbiór możliwych zdarzeń) jest na ogół znany: np.

- {orzeł, reszka}, {1,2,3,4,5,6},
  - {dziewczynka, chłopiec},
    - [0-5(min)],
      - [2-3(cm)].

Moc zbioru - liczba elementów danego zbioru, np.: $|\{2,4,6\}|=3$, $|\{\text{dni powszednie}\}|=5$.

Zdarzenie elementarne

pojęcie pierwotne w aksjomatyce rach. prawd. - elementarny, niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

Oznaczenia: e - zdarzenie elementarne,

E - przestrzeń zdarzeń elementarnych (skończona, nieskończona)

$$e \in E$$

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

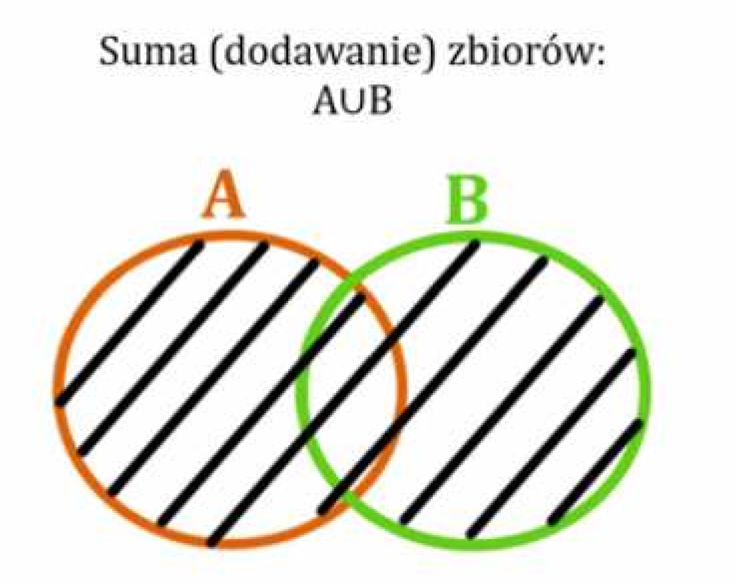
Zbiór	Zdarzenie
zbiór pusty	zdarzenie niemożliwe
zbiór pełny	zdarzenie pewne

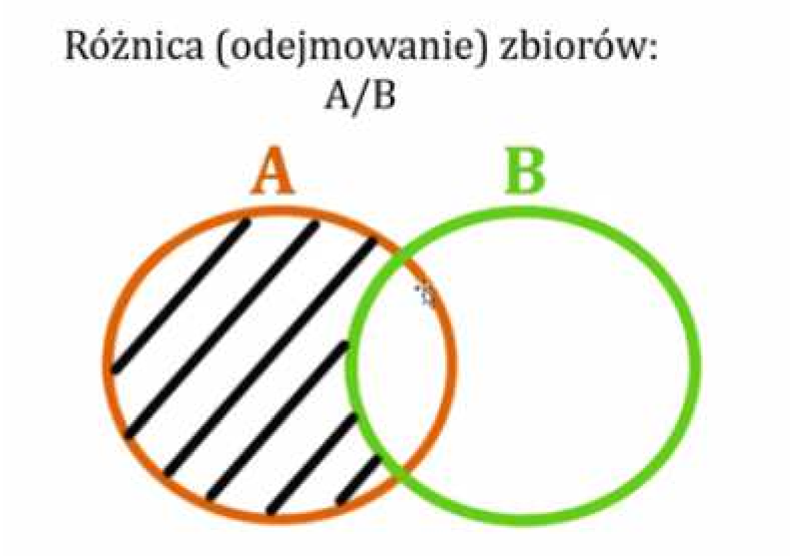
- Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia losowego A jest zawsze liczbą z przedziału $\langle 0;1 \rangle$.
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

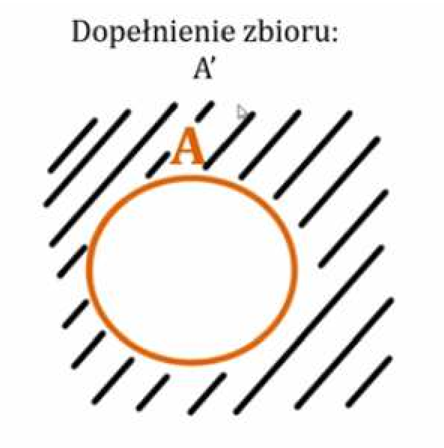
- Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1.
$$P(\Omega) = 1$$

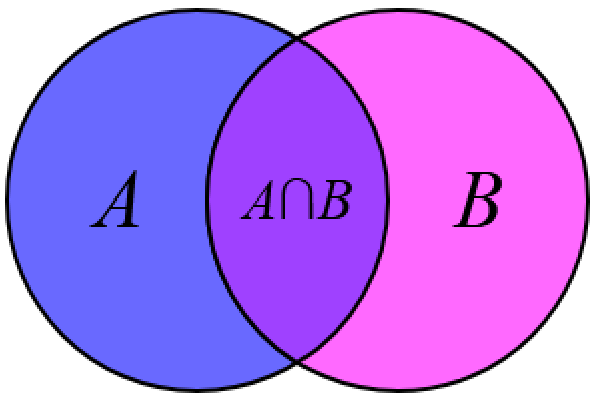
- Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0.
$$P(\Omega) = 0$$

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

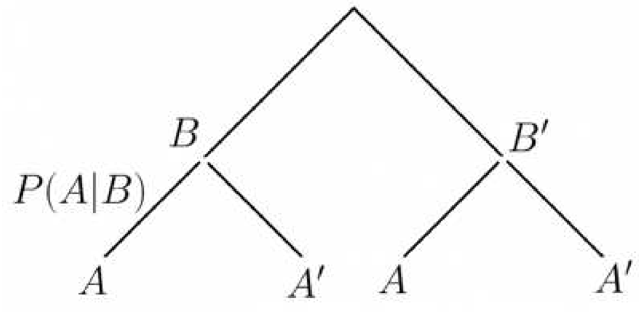








RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

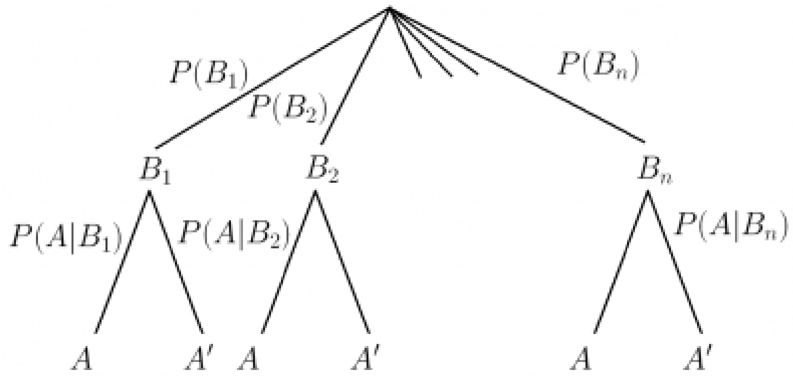


Prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem, że wystąpiło zdarzenie B policzymy jako .

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B liczymy ze wzoru (pod warunkiem, że P(B)>0):

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA



Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym:

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym – w teorii prawdopodobieństwa, twierdzenie pozwalające na obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń, które mogą zajść w konsekwencji zajścia innych zdarzeń, takich jak doświadczenia wieloetapowe.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

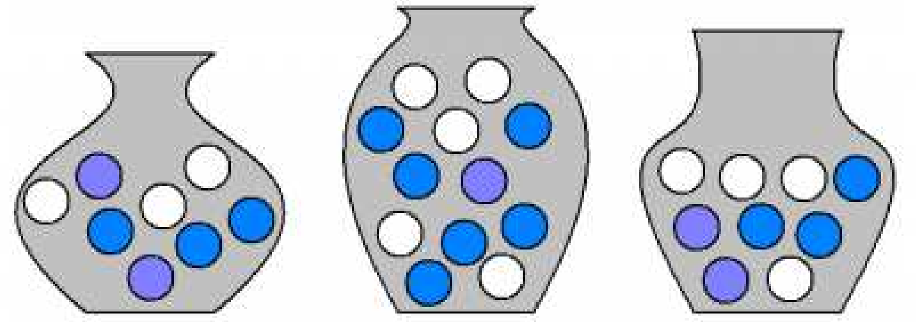
gdzie: A_i – „n" wyłączających się wzajemnie zdarzeń losowych, B – zdarzenie losowe, które można przedstawić jako sumę iloczynów $B \cdot A_i$ (i = 1,2,…,n)

Twierdzenie to pozwala wyrazić prawdopodobieństwo zdarzenia losowego B za pomocą prawdopodobieństwa warunkowego jego zajścia względem zdarzeń wzajemnie wyłączających się i wyczerpujących cały zbiór zdarzeń elementarnych.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Przykład:

Niech dana będą trzy urny z kulami:



Wyobraźmy sobie eksperyment polegający na rzucaniu kostką i losowaniu kuli z urny:

(1) pierwszej gdy wypadnie 2 lub 3,

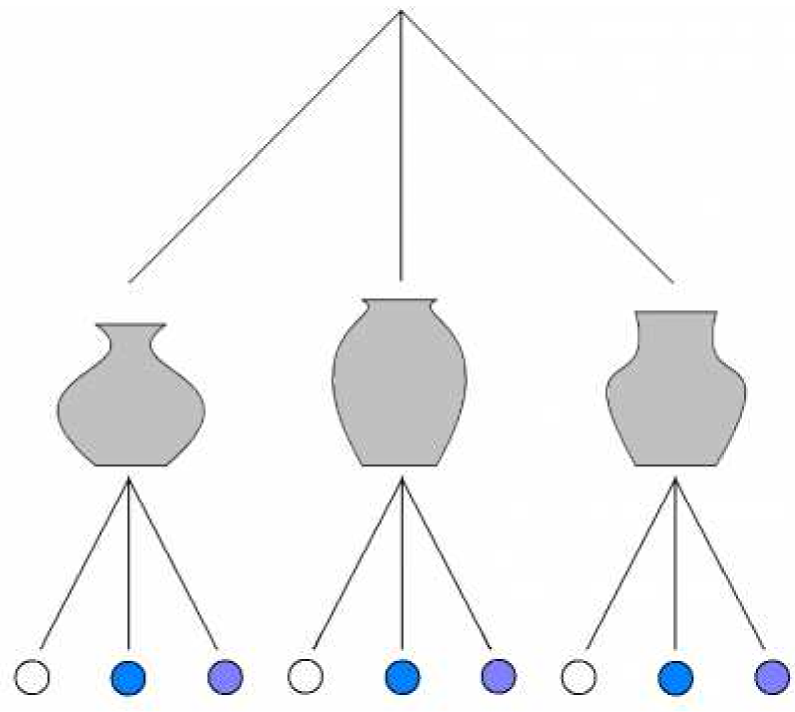
(2) drugiej gdy wypadnie 5,

(3) trzeciej w pozostałych przypadkach.

Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli?

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

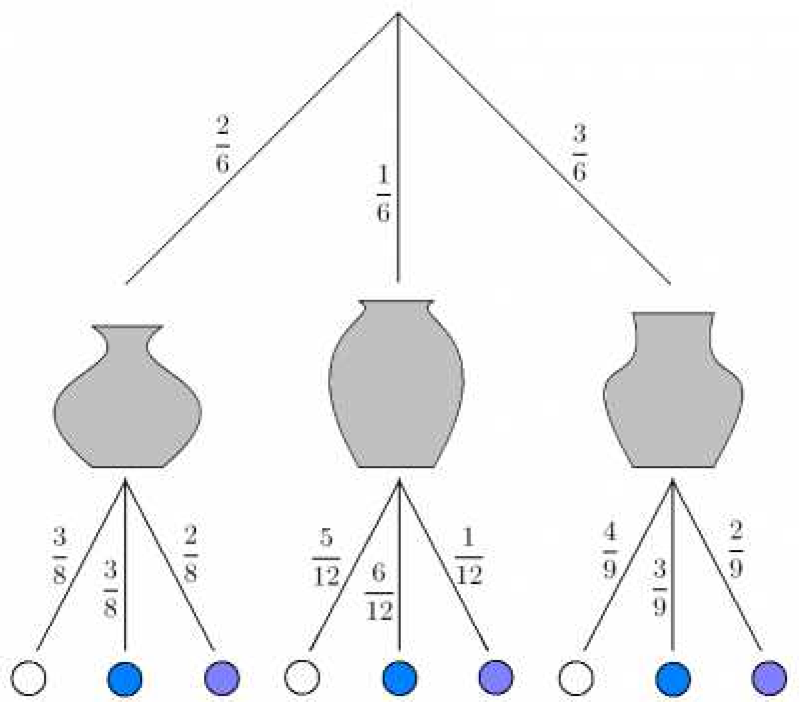
Przedstawmy sytuację na diagramie:



Teraz przyporządkujmy poszczególnym sytuacjom prawdopodobieństwa zgodnie z danymi z zadania.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Teraz przyporządkujmy poszczególnym sytuacjom prawdopodobieństwa zgodnie z danymi z zadania.



Po tej wstępnej analizie skorzystać możemy z wzoru na prawdopodobieństwo całkowite. Interesują nas sytuacje, w których wylosujemy kulę białą. Oznaczmy zatem $P(A)$ jako prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli i policzmy:

$$P(A)=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{12}+\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{9}=\frac{3}{24}+\frac{5}{72}+\frac{2}{9}=\frac{30}{72}\approx 41{,}6\%$$

Takie jest więc całkowite prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Twierdzenie Bayesa:

Twierdzenie to pozwala na określenie prawdopodobieństwa „a posteriori" (po fakcie) zdarzenia A_j, pod warunkiem zajścia zdarzenia B, jeśli znane są prawdopodobieństwa „a priori" (wstępne) zdarzeń A_i i prawdopodobieństwo warunkowe $P(B/A_j)$ (założone):

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)}$$

W sposób opisowy:

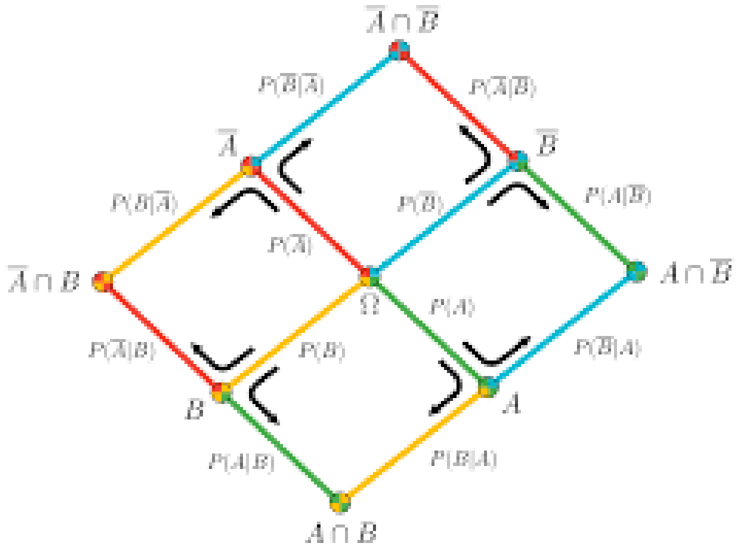
$$P(stanu/próby) = \frac{P(stanu) \cdot P(próby/stanu)}{\sum_{i=1}^{n} P(próby/stanu) \cdot P(stanu)}$$

Ograniczenia:

A_i – zdarzenia wyłączające się

A_i - spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym

$P(B) > 0$

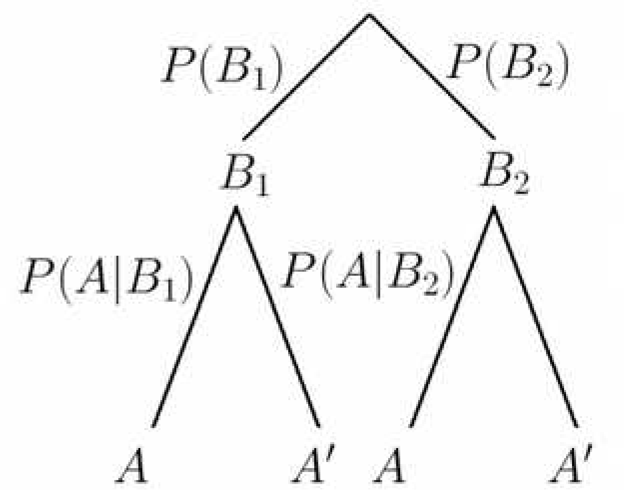


$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Do dyspozycji są dwie kostki - pierwsza jest idealnie symetryczna, a druga podpiłowana tak, że prawdopodobieństwo wyrzucenia na niej szóstki wzrosło do . Wykonane zostały dwa rzuty, przy losowym wyborze kostek i wypadły dwie szótki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucono oszukiwaną kostką?

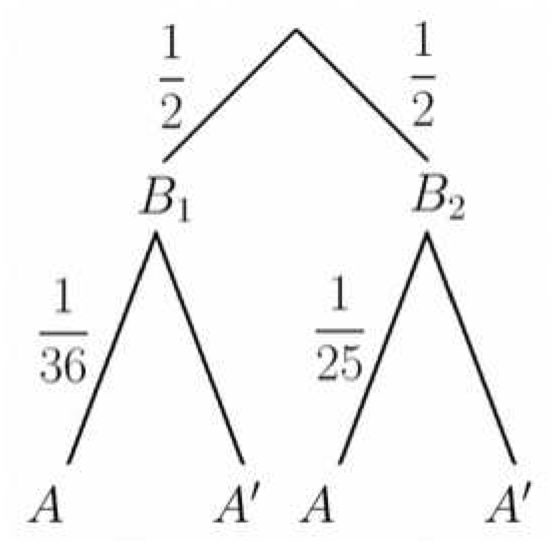
Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na wyrzuceniu dwóch szóstek, natomiast B_1 i będą oznaczać odpowiednio rzut prawidłową kostką i rzut kostką-szulerką. Wówczas sytuacja narysowana na diagramie przedstawia się następująco:



Oczywiście $P(A|B_1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$, a także $P(A|B_2)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$.

Wybór kostki następował w sposób losowy, zatem $P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$.

Wiemy również (z wzoru na prawopodobieństwo całkowite), że $P(A)=\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{50}+\frac{1}{72}=\frac{122}{3600}$.



Teraz policzyć możemy

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{122}{3600}}=\frac{1}{50}\cdot\frac{3600}{122}=\frac{36}{61}\approx 0{,}59$$

Zatem prawdopodobieństwo tego, że rzucono piłowaną kostką wynosi $0{,}59$.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!